Tomasz Downarowicz
Instytut Matematyki i Informatyki
Politechnika Wrocławska
50-370 Wrocław

Wrocław, kwiecień 2011

Analiza Funkcjonalna WPPT IIr.

Wykłady 4 i 5: Przestrzenie unitarne i Hilberta (rzeczywiste i zespolone)

1. ILOCZYN SKALARNY

Definicja. *Iloczyn skalarny* w przestrzeni liniowej V nad ciałem $\mathbb{R}$ (lub $\mathbb{C}$) to funkcja

$$\langle\cdot,\cdot\rangle : V \times V \to \mathbb{C}$$

spełniająca warunki:
1) $\langle x, x\rangle \geq 0$, $\langle x, x\rangle = 0 \iff x = 0$
2) $\langle x, y\rangle = \overline{\langle y, x\rangle}$
3) $\langle x, y + z\rangle = \langle x, y\rangle + \langle x, z\rangle$
4) $\langle \alpha x, y\rangle = \alpha\langle x, y\rangle$

Iloczyn skalarny zadaje normę wzorem $\|x\| = \sqrt{\langle x, x\rangle}$. Istotnie, widać natychmiast warunek na zero oraz jednorodność. Podaddytywność wyniknie z nier. Schwarza:

Twierdzenie (Nierówność Schwarza)

$$|\langle x, y\rangle| \leq \|x\|\|y\|$$

Dowód: Jeśli $y = \mathbf{0}$ to nierówność jest trywialna. W innym wypadku, kładziemy $t = \frac{\langle x,y\rangle}{\|y\|^2}$. Wtedy

$$0 \leq \langle x - ty, x - ty\rangle = \langle x, x\rangle - \langle x, ty\rangle - \langle ty, x\rangle + \langle ty, ty\rangle =$$
$$\|x\|^2 - \bar{t}\langle x, y\rangle - t\overline{\langle x, y\rangle} + |t|^2\|y\|^2 = \|x\|^2 - 2\frac{|\langle x, y\rangle|^2}{\|y\|^2} + \frac{|\langle x, y\rangle|^2}{\|y\|^2},$$

co po uproszczeniu i pomnożeniu przez $\|y\|^2$ daje tezę. $\square$

Teraz możemy wykazać podaddytywność normy:

$$\|x + y\|^2 = \|x\|^2 + \langle x, y\rangle + \langle y, x\rangle + \|y\|^2 = \|x\|^2 + 2Re(\langle x, y\rangle) + \|y\|^2 \leq$$
$$\|x\|^2 + 2|\langle x, y\rangle| + \|y\|^2 \leq \|x\|^2 + 2\|x\|\|y\| + \|y\|^2 = (\|x\| + \|y\|)^2.$$

Definicje.
Przestrzeń unitarna to przestrzeń z iloczynem skalarnym i zadaną przezeń normą.
Przestrzeń Hilberta to przestrzeń unitarna zupełna.

Fakt. Mamy ciągłość iloczynu skalarnego (jako funkcji dwóch zmiennych) w normie:

$$x_n \xrightarrow{\|\,\|} x, y_n \xrightarrow{\|\,\|} y \implies \langle x_n, y_n\rangle \to \langle x, y\rangle.$$

Dowód: Mamy:

$$
\begin{aligned}
|\langle x_n, y_n\rangle - \langle x, y\rangle| &= |\langle x_n, y_n\rangle - \langle x_n, y\rangle + \langle x_n, y\rangle - \langle x, y\rangle| = \\
&|\langle x_n, y_n - y\rangle + \langle x_n - x, y\rangle| \leq \|x_n\|\|y_n - y\| + \|x_n - x\|\|y\| \longrightarrow \\
&\longrightarrow \|x\| \cdot 0 + 0 \cdot \|y\| = 0,
\end{aligned}
$$

gdzie ostatnia nierówność wynika z nierówności Schwarza, a zbieżność $\|x_n\| \to \|x\|$ wynika z ciągłości normy. □

Fakt. (Nierówność równoległoboku) Norma zadana przez iloczyn skalarny spełnia następujący warunek:

$$\|x + y\|^2 + \|x - y\|^2 = 2\|x\|^2 + 2\|y\|^2$$

(Interpretacja: suma kwadratów przekątnych równoległoboku jest równa sumie kwadratów jego boków.)

Dowód: Trzeba napisać kwadraty norm jako iloczyny skalarne, po lewej stronie wymnożyć i skrócić. □

Twierdzenie. Jeśli norma w jakiejś przestrzeni unormowanej spełnia warunek równoległoboku, to istnieje tam iloczyn skalarny zgodny z tą normą.

Dowód: Iloczyn skalarny wprowadzamy wzorem:

$$
\begin{aligned}
Re(\langle x, y\rangle) &= \tfrac{1}{2}(\|x + y\|^2 - \|x\|^2 - \|y\|^2) \\
Im(\langle x, y\rangle) &= \tfrac{1}{2i}(\|x - iy\|^2 - \|x\|^2 - \|y\|^2)
\end{aligned}
$$

Sprawdzenie aksjomatów iloczynu skalarnego – na ćwiczeniach. □

2. ORTOGONALNOŚĆ.

Definicja. Powiemy, że dwa wektory są ortogonalne jeśli ich iloczyn skalarny jest zero:

$$x \perp y \iff \langle x, y\rangle = 0.$$

Uwaga: Wektor zerowy jest ortogonalny do każdego wektora. Ortogonalność parami elementów dowolnego zbioru **nie zawierającego zera** implikuje niezależność tego zbioru (ale nie odwrotnie).

3. RZUT ORTOGONALNY.

Niech $A \subset V$ będzie podzbiorem przestrzeni unitarnej i niech $x \in V$. Powiemy, że x jest ortogonalny do A, co zapiszemy $x \perp A$ jeśli $x \perp y$ dla każdego $y \in A$. Z liniowości i ciągłości iloczynu skalarnego wynika, że wtedy również $x \perp \overline{Lin}(A)$.

Niech teraz W oznacza domkniętą podprzestrzeń przestrzeni unitarnej V i niech $x \in V$.

Definicja. Rzutem ortogonalnym x na W nazywamy wektor $x_W \in W$ spełniający $(x - x_W) \perp W$.

Rzut ortogonalny, o ile istnieje, jest jednoznaczny: gdyby $x - w_1 \perp W$ i $x - w_2 \perp W$, gdzie $w_1, w_2 \in W$, to $x - w_1 - x + w_2 = w_1 - w_2 \perp W$, a to oznacza, że $w_1 - w_2$ jest ortogonalny sam do siebie, co z kolei oznacza, że jest to wektor zerowy.

Jeśli $x \in W$, to oczywiście $x_W = x$. Później wykażemy, że w przestrzeni Hilberta rzut ortogonalny dowolnego wektora na dowolną podprzestrzeń domkniętą istnieje.

Najpierw zajmiemy się przypadkiem, gdy $W = Lin\{x_1, \ldots, x_n\}$, gdzie $x_1, \ldots x_n$ są parami ortogonalne i unormowane. Zauważmy, że w takim przypadku każdy wektor $w \in W$, zapisuje się jednoznacznie jako $w = \sum_{i=1}^n a_i x_i$. I wtedy jego norma wylicza się następująco:

$$\|w\|^2 = \langle w, w\rangle = \langle \sum_{i=1}^n a_i x_i, \sum_{j=1}^n a_j x_j \rangle = \sum_{i,j=1}^n a_i \bar{a}_j \langle x_i, x_j\rangle =$$

$$\sum_{i=1}^n a_i \bar{a}_i \langle x_i, x_i\rangle = \sum_{i=1}^n |a_i|^2,$$

czyli

$$\|w\| = \sqrt{\sum_{i=1}^n |a_i|^2}.$$

(Jest to Twierdzenie Pitagorasa.)

Zbadamy teraz rzut ortogonalny na taką przestrzeń W. Mianowicie, wtedy, dla dowolnego $x \in V$ mamy

$$x_W = \sum_{i=1}^n \langle x, x_i\rangle x_i.$$

Faktycznie, $x_W \in W$ oraz niech $y \in W$, $y = \sum_{i=1}^n \alpha_i x_i$. Obliczmy

$$\langle x - x_W, y\rangle = \left\langle x, \sum_{i=1}^n \alpha_i x_i \right\rangle - \left\langle \sum_{i=1}^n \langle x, x_i\rangle x_i, \sum_{i=1}^n \alpha_i x_i \right\rangle =$$

$$\sum_{i=1}^n \bar{\alpha}_i \langle x, x_i\rangle - \sum_{i=1}^n \langle x, x_i\rangle \bar{\alpha}_i 1 = 0.$$

Liczby $\langle x, x_i\rangle$ nazywamy *współczynnikami Fouriera* dla x względem układu ortonormalnego $\{x_1, \ldots, x_n\}$.

Fakt 1.(Nierówność Bessela w wymiarze skończonym) Suma kwadratów współczynników Fouriera x nie przekracza $\|x\|^2$.

Dowód: Faktycznie

$$\|x\|^2 = \langle x, x\rangle = \langle x - x_W + x_W, x - x_W + x_W\rangle = \|x - x_W\|^2 + 0 + 0 + \|x_W\|^2 \geq \|x_W\|^2 =$$

$$\sum_{i=1}^n \langle x, x_i\rangle^2. \quad \square$$

Niech teraz $\{x_1, x_2, \dots\}$ będzie ciągiem elementów unormowanych i parami ortogonalnych. z powyższego lematu wynika natychmiast, że ciąg $\langle x, x_i \rangle$ jest sumowalny z kwadratem i suma kwadratów nie przekracza kwadratu normy x.

Fakt 2. Jeśli teraz mamy ciąg liczb α_i sumowalny z kwadratem, to ciąg sum skończonych $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i x_i$ jest podstawowy w normie.

Dowód: Faktycznie, kwadrat normy różnicy między n-tą a m-tą taką sumą wynosi

$$\sum_{i=n+1}^{m} \alpha_i^2,$$

a to jest dowolnie małe jeśli n i m są dostatecznie duże. $\square$

Fakt 3. Kwadrat normy elementu będącego granicą takiego szeregu (o ile istnieje) jest równy sumie kwadratów współczynników.

Dowód: Faktycznie, kwadrat normy sumy skończonej jest równy odpowiedniej sumie skończonej kwadratów liczb α_i a norma jest ciągła, więc w granicy otrzymamy żądaną równość. $\square$

Twierdzenie. Niech V będzie przestrzenią Hilberta i niech $\{x_1, x_2 \dots\}$ będzie układem ortonormalnym. Niech $W = \overline{Lin}(\{x_1, x_2 \dots\})$. Wtedy rzut ortogonalny dowolnego elementu $x \in V$ na W wyraża się wzorem

$$x_W = \sum_{n=1}^{\infty} \langle x, x_n \rangle x_n.$$

Kwadrat normy x_W wynosi $\sum_n \langle x, x_n \rangle^2$ i nie przekracza $\|x\|^2$. (Ostatnia nierówność nosi nazwę *nierówności Bessela*.)

Dowód: Z Faktu 1 wynika, że szereg współczynników Fouriera $\langle x, x_n \rangle$ jest sumowalny z kwadratem i suma tego szeregu nie przekracza kwadratu normy x. Dalej, z Faktu 2 i zupełności wynika, że szereg w definicji x_W jest zbieżny, czyli element x_W jest poprawnie zdefiniowany. Sprawdzimy, że jest on rzutem ortogonalnym x na przestrzeń domkniętą W. Po pierwsze, należy on do tej przestrzeni. Dalej, dla dowolnie ustalonego n_0 obliczmy

$$\langle x - x_W, x_{n_0} \rangle = \left\langle x - \sum_{n=1}^{\infty} \langle x, x_n \rangle x_n, x_{n_0} \right\rangle = \langle x, x_{n_0} \rangle - \sum_{n=1}^{\infty} \langle x, x_n \rangle \langle x_n, x_{n_0} \rangle =$$
$$\langle x, x_{n_0} \rangle - \langle x, x_{n_0} \rangle \langle x_{n_0}, x_{n_0} \rangle = 0.$$

Zatem $x - x_W \perp \{x_1, x_2, \dots\}$, a to implikuje, że $x - x_W \perp W$. Wzór na normę x_W wynika z Faktu 3, a oszacowanie z pierwszego zdania dowodu. $\square$

UWAGA: Jeśli ciąg $\{x_i\}$ rozpina całą przestrzeń V (w sensie domkniecia), to oczywiście $x_W = x$ i wtedy mamy wzór

$$(*) \qquad x = \sum_n \langle x, x_n \rangle x_n \quad \text{oraz} \quad \|x\|^2 = \sum_n \langle x, x_n \rangle^2.$$

Równość ta nosi nazwę *tożsamości Parsevala.*

Wynika z tego, że **w przestrzeni Hilberta każdy przeliczalny układ ortonormalny liniowo gęsty $\{x_n\}$ jest bazą topologiczną**. Powyższa reprezentacja x w tej bazie nazywa się też *rozwinięciem x w szereg Fouriera względem bazy $\{x_n\}$.*

4. ORTOGONALIZACJA GRAMMA–SCHMIDTA

Twierdzenie. Niech $\{y_1, y_2 \dots\}$ będzie ciągiem liniowo niezależnym w przestrzeni unitarnej. Wtedy istnieje ciąg ortonormalny $\{x_1, x_2, \dots\}$ taki, że dla każdego n, $Lin\{y_1, \dots, y_n\} = Lin\{x_1, \dots, x_n\}$ (w szczególności $\overline{Lin}\{y_1, y_2 \dots\} = \overline{Lin}\{x_1, x_2 \dots\}$).

Dowód: Zauważmy, że ciąg $\{y_n\}$ jako niezależny nie zawiera zera. Zatem można dzielić przez $\|y_n\|$.

Krok 1. $x_1 = \frac{y_1}{\|y_1\|}$.

Krok $n{+}1$. Załóżmy, że skonstruowaliśmy układ ortonormalny $x_1, \dots, x_n$ o żądanych własnościach (rozpinanie tych samych przestrzeni przez początkowe kawałki ciągu, co dla $y_1, \dots, y_n$). Mamy wskazać x_{n+1} tak, aby $Lin\{y_1, \dots, y_{n+1}\} = Lin\{x_1, \dots, x_{n+1}\}$. Definiujemy

$$x_{n+1} = \frac{y_{n+1} - (y_{n+1})_W}{\|y_{n+1} - (y_{n+1})_W\|},$$

gdzie $W = Lin\{y_1, \dots, y_n\}$($= Lin\{x_1, \dots, x_n\}$ z założenia indukcyjnego). W mianowniku nie występuje zero, gdyż y_{n+1} jest niezależny od $\{y_1, \dots, y_n\}$, zatem nie należy do W, stąd $(y_{n+1})_W \neq y_{n+1}$. Zdefiniowany wektor ma więc normę 1, jest ortogonalny do W, a więc do wszystkich $x_1, \dots x_n$. Z wektorów $x_1, \dots, x_{n+1}$ można uzyskać y_{n+1} jako kombinajcę liniową (najpierw można uzyskać $(y_{n+1})_W$ bo ten należy do W, a potem dodając do x_{n+1} pomnożony przez mianownik z powyższej definicji odtworzymy y_{n+1}.) Zatem $y_{n+1} \in Lin\{x_1, \dots, x_{n+1}\}$ (no i oczywiście $x_{n+1} \in Lin\{y_1, \dots, y_{n+1}\}$), co wobec równości przestrzeni rozpiętych przez wektory do numeru n daje równość przestrzeni rozpiętych przez wektory do numeru $n + 1$. $\square$

5. ISTNIENIE BAZY ORTONORMALNEJ W OŚRODKOWEJ PRZESTRZENI HILBERTA.

Twierdzenie. W przestrzeni Hilberta istnieje maksymalny zbiór ortonormalny B. Mamy wtedy $\overline{Lin}(B) = V$. W przypadku ośrodkowym zbiór B jest co najwyżej przeliczalny (czyli wtedy jest on bazą topologiczną).

Dowód: Rozpatrzmy rodzinę zbiorów ortonormalnych (nie koniecznie przeliczalnych) uporządkowaną rosnąco przez inkluzję. Łatwo widać, że suma tej rodziny jest też zbiorem ortonormalnym. Zatem wśród zbiorów ortonormalnych każdy łańcuch ma kres górny. Z lematu Kuratowskiego–Zorna wynika istnienie maksymalnego zbioru ortonormalnego B. Zauważmy, że odległość dwóch wektorów ortonormalnych zawsze wynosi $\sqrt{2}$, zatem każdy układ ortonormalny jest zbiorem $\sqrt{2}$-rozdzielonym. W przypadku ośrodkowym zbiór rozdzielony (z jakąś stałą) może być co najwyżej przeliczalny.

Teraz pokażemy, że B rozpina całą przestrzeń. Jeśli istnieje x nie należący do $W = \overline{Lin}(B)$, to rzutujemy go na W i wtedy $x \neq x_W$. Zatem $\mathbf{0} \neq x - x_W \perp W$. Wtedy $B \cup \{\frac{x - x_W}{\|x - x_W\|}\}$ jest zbiorem ortonormalnym większym do B, co przeczy maksymalności. $\square$

Zwerbalizujmy jeszcze raz co zostało pokazane: **W każdej ośrodkowej przestrzeni Hilberta istnieje ortonormalna baza topologiczna.** Nazywamy ją po prostu *bazą przetrzeni Hilberta.* **Każdy element rozwija się w szereg Fouriera i ma normę jak we wzorach** (*).

Jeśli zostanie czas:
Przykłady: $\mathbb{R}^n$, l^2, $L^2([0, 2\pi])$, $L^2(\mathbb{R})$. Przypomnieć ośrodkowość. Zatem każda z nich ma bazę ortonormalną. Wskazać te łatwe bazy. Pokazać, że $\{1, \cos nx, \sin nx\}$ jest bazą w $L^2([0, 2\pi])$ ortogonalną (trzeba ją jeszcze unormować). W tym celu trzeba skorzystać z Tw. Weierstrassa (zob. Musielak, str. 73 Tw. 9.6), z tego że jednostajna zbieżność implikuje w L^2, i z tego, że f. ciągłe leżą gęsto. Ortogonalność wynika ze wzorów na górze str. 74. W $L^2(\mathbb{R})$ bazą jest na przykład suma baz na odcinkach $[2k\pi, (2 + 1)k\pi]$ (przedłużonych zerowo na całe $\mathbb{R}$).

7. Izomorfizm przestrzeni Banacha, izomorfizm unitarny.

Twierdzenie. Każde dwie ośrodkowe przesterznie Hilberta są unitarnie izomorficzne.